

Artículo:

## Derivación del volumen de la hiperesfera en n dimensiones y su comportamiento cuando n tiende a infinito

### Derivation of the volume of the hypersphere in n dimensions and its behavior when n tends to infinity

Omar Wilfrido Vázquez-Estrada<sup>1</sup>, Leobardo Mendo-Ostos<sup>1</sup>, Celia Francisco-Martínez<sup>1</sup>

Revista Interdisciplinaria de  
Ingeniería Sustentable y Desarrollo  
Social (RIISDS)

<sup>1</sup> Tecnológico Nacional de México – Instituto Tecnológico Superior de  
Tantoyuca, Veracruz, México.

\* Autor corresposal: [omar.vazquez@itsta.edu.mx](mailto:omar.vazquez@itsta.edu.mx)

Recibido: 02 de octubre de 2024  
Aceptado: 11 de diciembre de 2024  
Publicado: 20 de diciembre de 2024

Publicación anual editada por el  
**Instituto Tecnológico Superior de  
Tantoyuca**

Desv. Lindero Tametate, S/N  
Col. La Morita  
C.P. 92100  
Tantoyuca, Veracruz, México.  
Teléfono: 789 8931680, Ext.196.

Correo electrónico:  
[revistadigital@itsta.edu.mx](mailto:revistadigital@itsta.edu.mx)

Sitio WEB  
<https://itsta.edu.mx/revistadigital>

ISSN 2448-8003

Editor responsable:  
**Dr. Horacio Bautista Santos**

**Copyright:** Este artículo es de acceso  
abierto distribuido bajo los términos y  
condiciones de la licencia Creative  
Commons  
[https://creativecommons.org/licenses/b  
y/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

**Resumen:** El cálculo del volumen de una esfera en dimensiones mayores que  $n=3$  constituye un problema clásico en matemáticas y aparece con frecuencia en cursos avanzados de cálculo y análisis matemático. Sin embargo, en muchos textos la deducción de la fórmula general para el volumen de una esfera en  $n$ -dimensiones, conocida como hiperesfera, suele presentarse de forma breve y poco accesible para el lector no especializado. El objetivo de este trabajo es presentar una derivación detallada y didáctica de la expresión general para el volumen de una hiperesfera de radio  $R$  en un espacio euclidiano de  $n$ -dimensiones. Para ello se emplea la transformación a coordenadas hiperesféricas y el uso de las funciones Gamma y Beta. La deducción permite obtener una expresión compacta que generaliza las fórmulas conocidas para una dimensión, dos dimensiones (círculo) y tres dimensiones (esfera ordinaria). Finalmente, se analiza el comportamiento del volumen cuando el número de dimensiones crece indefinidamente, mostrando que su valor presenta comportamientos contraintuitivos dependiendo del radio considerado. Este análisis ilustra cómo las matemáticas permiten explorar propiedades geométricas en espacios de dimensiones arbitrarias.

**Palabras clave:** hiperesfera, volumen en  $n$  dimensiones, función gamma, geometría multidimensional.

## Abstract

The calculation of the volume of a sphere in dimensions greater than  $n=3$  is a classical problem in mathematics and frequently appears in advanced calculus and mathematical analysis courses. However, in many textbooks the derivation of the general formula for the volume of an  $n$ -dimensional sphere, commonly known as a hypersphere, is presented briefly and often lacks pedagogical clarity. The aim of this work is to present a detailed and accessible derivation of the general expression for the volume of a hypersphere of radius  $R$  in an  $n$ -dimensional Euclidean space. The derivation is based on the use of hyperspherical coordinates and the properties of the Gamma and Beta functions. This approach leads to a compact formula that generalizes the well-known results for one dimension, two dimensions (circle), and three dimensions (ordinary sphere). Finally, the behavior of the hypersphere volume is analyzed as the number of dimensions approaches infinity, revealing counterintuitive geometric properties depending on the value of the radius. This study highlights how mathematical methods allow the exploration of geometric structures in spaces of arbitrary dimension.

**Keywords:** hypersphere,  $n$ -dimensional volume, gamma function, multidimensional geometry.

## Introducción

La geometría del espacio en el que vivimos está íntimamente ligada a nuestra experiencia cotidiana. Nuestros sentidos están adaptados a un entorno tridimensional en el que los objetos poseen largo, ancho y alto, lo que permite describir su posición mediante tres coordenadas espaciales. Desde el punto de vista matemático, este tipo de espacio se modela mediante la geometría euclidiana tridimensional, donde la posición de un punto queda determinada por un conjunto de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  (Marsden & Tromba, 2003). Sin embargo, las matemáticas permiten extender de manera natural estos conceptos a espacios de dimensión arbitraria, donde un punto puede describirse mediante  $n$ -coordenadas  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Estos espacios multidimensionales aparecen con frecuencia en diversas áreas de la matemática moderna, la física teórica, la estadística y el análisis de datos (Arfken & Weber, 2012; Tu, 2011).

Aunque resulta difícil visualizar objetos geométricos en dimensiones superiores a tres, las herramientas matemáticas permiten describirlos con precisión. Por ejemplo, la generalización natural de la esfera tridimensional es la llamada hiperesfera, definida como el conjunto de puntos en un espacio euclidiano de  $n$ -dimensiones cuya distancia al origen es constante. Esta definición constituye una extensión directa de la ecuación de la esfera conocida en tres dimensiones (Stewart, 2015). De manera análoga, otras figuras geométricas pueden extenderse a dimensiones superiores, como el hipercubo, los cuales han sido objeto de estudio tanto en geometría como en análisis matemático (Conway & Sloane, 1999).

El estudio del volumen de la esfera posee una larga historia dentro de las matemáticas. En la antigua Grecia, Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe, obteniendo así la conocida expresión mostrada en la Ec. 1.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \text{Ec. (1)}$$

resultado que constituye uno de los logros más notables de la geometría clásica (Archimedes, 1964; Boyer, 1991). Durante los siglos posteriores, el desarrollo del cálculo diferencial e integral permitió formalizar el cálculo de áreas y volúmenes mediante métodos analíticos. Los trabajos de Newton y Leibniz sentaron las bases del cálculo moderno, lo que permitió extender estas ideas a problemas geométricos más generales (Courant & John, 1996). Con el desarrollo del cálculo multivariable y del análisis matemático, surgió la posibilidad de estudiar volúmenes en espacios de dimensión arbitraria. En este contexto, la deducción del volumen de la hiperesfera puede realizarse utilizando coordenadas generalizadas y herramientas analíticas como las funciones Gamma y Beta, las cuales aparecen de manera natural en múltiples problemas de matemáticas y física matemática (Artin, 1964; Arfken & Weber, 2012). Estas funciones permiten expresar de forma compacta el volumen de una hiperesfera de radio  $R$   $n$ -dimensiones mediante una fórmula general que depende únicamente de la dimensión del espacio y del radio de la esfera.

Un aspecto particularmente interesante de la geometría en espacios de muchas dimensiones es que muchas de sus propiedades resultan contraintuitivas. Por ejemplo, el volumen de una hiperesfera de radio unitario no crece indefinidamente al aumentar la dimensión del espacio;

por el contrario, a partir de cierto valor de  $n$  comienza a decrecer rápidamente y tiende a cero cuando  $n$  se hace muy grande. Este comportamiento ha sido ampliamente estudiado en áreas como la geometría convexa, la teoría de la medida y el análisis de alta dimensión (Ball, 1997; Folland, 1999).

El objetivo de este artículo es presentar una derivación clara y detallada del volumen de una hiperesfera en  $n$ -dimensiones, utilizando coordenadas hiperesféricas y las propiedades de las funciones Gamma y Beta. Además, se analizará el comportamiento del volumen cuando el número de dimensiones crece indefinidamente, mostrando algunos resultados sorprendentes que ilustran la riqueza de la geometría multidimensional. Este enfoque pretende ofrecer una exposición accesible para estudiantes y lectores interesados en las matemáticas, manteniendo al mismo tiempo el rigor necesario para comprender el origen de la expresión general del volumen de la hiperesfera.

## **Materiales y métodos**

### *Derivación del volumen de una hiperesfera en $n$ -dimensiones*

Para determinar el volumen de una esfera en un espacio de dimensión arbitraria, consideremos primero la definición general de una esfera en un espacio euclidiano  $n$ -dimensional. Una **hiperesfera de radio  $R$**  centrada en el origen se define como el conjunto de puntos que satisfacen la Ec. 2.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = R^2, \quad \text{Ec. (2)}$$

Esta expresión constituye una generalización directa de la ecuación conocida de la esfera en tres dimensiones. Para calcular el volumen contenido dentro de esta superficie utilizaremos una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas hiperesféricas. Este sistema de coordenadas constituye una extensión del sistema de coordenadas polares y esféricas a espacios de dimensión arbitraria. En un espacio de  $n$ -dimensiones, las coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se transforman en coordenadas hiperesféricas  $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ . En  $n$  dimensiones, estas coordenadas se representan como:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos(\theta_1) \\
 x_2 &= r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
 x_3 &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \\
 x_n &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1})
 \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas, el elemento diferencial de volumen se obtiene a partir del jacobiano de la transformación, resultando la Ec. 3:

$$dV_n(R) = r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) d\theta_{n-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1 dr. \quad \text{Ec. (3)}$$

El volumen total de la hiperesfera se obtiene integrando este elemento diferencial sobre todo el dominio de las coordenadas (Ec. 4):

$$V_n(R) = \int \cdots \int dV_n(R), \quad \text{Ec. (4)}$$

Los límites de integración están dados por

$$\begin{aligned}
 0 &\leq r \leq R, \\
 0 &\leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \\
 0 &\leq \theta_{n-1} \leq 2\pi.
 \end{aligned}$$

Para encontrar el volumen de la hiperesfera, integramos el elemento de volumen (Ec. 4), sobre todas las coordenadas (Ec. 5):

$$\begin{aligned}
 V_n(R) &= \\
 &= \int_0^R \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \sin(\theta_{n-2}) d\theta_{n-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1 dr = \quad \text{Ec. (5)} \\
 &= \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta_1) d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}(\theta_2) d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin(\theta_{n-2}) d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1},
 \end{aligned}$$

La integral anterior (Ec. 5) puede resultar complicada de resolver, pero no lo es del todo. La integral se puede separar en una parte radial y una parte angular, en la parte radial tenemos (la primera integral, Ec. 6):

$$\int_0^R r^{n-1} dr = \frac{R^n}{n}. \quad \text{Ec. (6)}$$

Por otra parte, la última integral que pertenece a la parte angular es muy sencilla de realizar, podemos notar en Ec. 7 que:

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} = [\theta_{n-1}]_0^{2\pi} = 2\pi. \quad \text{Ec. (7)}$$

Llegamos a la parte más “complicada” que consiste en resolver las integrales angulares, es decir, aquellas integrales que tienen la forma mostrada en Ec. 8

$$\int_0^\pi \sin^k(\theta) d\theta, \quad \text{Ec. (8)}$$

donde  $k = n - 2, n - 3, \dots, 2, 1$ . Para ello vamos a usar la función Beta la cual está relacionada con la función Gamma, mediante la expresión mostrada en la Ec. 9.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{Ec. (9)}$$

Reescribamos la función  $B(x, y)$ , haciendo el siguiente cambio de variable sea  $t = \sin^2(\theta)$ . Así,  $dt = 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta$ . Cuando  $t$  varía de 0 a 1,  $\theta$  varía de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , debido al cambio de variable. Reescribimos la integral en términos de  $\theta$ :

$$t = \sin^2(\theta)$$

$$1 - t = \cos^2(\theta)$$

$$dt = 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta$$

Sustituimos estas variables en la integral de la función Beta (Ec. 9):

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \\ & \int_0^1 (\sin^2(\theta))^{x-1} (\cos^2(\theta))^{y-1} 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta = \\ & 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^{2x-2}(\theta)) (\cos^{2y-2}(\theta)) \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta = \\ & 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función Beta la podemos reescribir como Ec. 10

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad \text{Ec. (10)}$$

Realizamos un cambio de variable de manera que sea  $x = \frac{k+1}{2}$  y  $y = \frac{1}{2}$ , la Ec (10) se reduce a lo mostrado en Ec. 11

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(\theta) \cos^0(\theta) d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}. \quad \text{Ec. (11)}$$

Por otra parte, la integral de la Ec. (8) la podemos reescribir como Ec. 12,

$$\int_0^{\pi} \sin^k(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(\theta) d\theta. \quad \text{Ec. (12)}$$

Finalmente, podemos ver en Ec. 13

$$\int_0^{\pi} \sin^k(\theta) d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}. \quad \text{Ec. (13)}$$

donde hemos usado que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Recordemos que  $k = n - 2, n - 3, \dots, 2, 1$ . Haciendo uso de la Ec. (13) y haciendo los cambios de  $k$ , tenemos que, Para  $\theta_1, k = n - 2$ , la integral se simplifica a:

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\theta_1) d\theta_1 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Para  $\theta_2, k = n - 3$ , la integral se simplifica a:

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-3}(\theta_2) d\theta_2 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Y así sucesivamente hasta la última integral,  $\theta_{n-2}$ , para  $k = 1$ :

$$\int_0^\pi \sin(\theta_{n-2}) d\theta_{n-2} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Esta última integral se puede resolver directamente evaluando  $\int_a^b \sin u du = [-\cos u]_a^b$ , o evaluando las funciones Gamma, de manera que  $\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) = \Gamma(1) = 1$  y  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , pero nos conviene dejarla de manera implícita en términos de la función Gamma. El producto de todas las integrales angulares desarrollado es Ec. 14:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta_1) d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}(\theta_2) d\theta_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} &= 2\pi \prod_{i=1}^{n-2} \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} \right] = \\ &= \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right] \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \right] \cdots \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right] \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] = 2\pi (\sqrt{\pi})^{n-2} \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] = \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{Ec. 14}$$

La expresión de la Ec. (14) se puede simplificar debido que hay términos comunes tanto en el numerador como en el denominador para los (n-2)-términos que se multiplican entre sí, quedando solamente  $\Gamma(1)$  en el numerador y  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$  en el denominador, esto simplifica bastante la expresión. Por último, multiplicando la parte radial, Exp. (Ec. 6) y, angular Exp. (Ec. 14), deducimos la expresión para determinar el volumen de una esfera en n-dimensiones, mostrada en Ec. 15:

$$V_n(R) = \frac{R^n}{n} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \tag{Ec. 15}$$

donde  $\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ .

**Resultados y discusión**

A partir de la deducción presentada en la sección anterior se obtuvo la expresión general para el volumen de una hiperesfera de radio  $R$  en un espacio euclidiano de  $n$ -dimensiones,

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

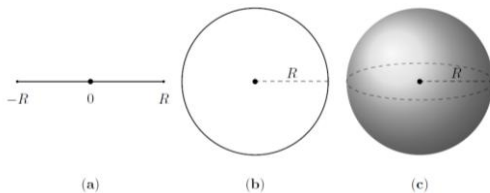
Esta expresión constituye una generalización directa de las fórmulas conocidas para figuras geométricas en dimensiones bajas. Para verificar su consistencia, es posible evaluar esta ecuación para diferentes valores de  $n$ . Para el caso de 1-dimensión, i.e.  $n = 1$ , la Exp. (Ec. 15) se reduce a

$$V_1(R) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} R^1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{\pi} R}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2R, \tag{Ec. 16}$$

donde  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , véase la Fig. 1 (a) para su representación geométrica que corresponde a un segmento de línea de longitud  $2R$ . Para 2-dimensiones, i.e.  $n = 2$ , la Exp. (Ec. 15) se reduce a Ec. 17

$$V_2(R) = \frac{\pi^{\frac{2}{2}} R^2}{\Gamma\left(\frac{2}{2} + 1\right)} = \frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \pi R^2, \tag{Ec. 17}$$

donde hemos usado que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , i.e.  $\Gamma(2) = (2 - 1)! = 1$ . En este caso vemos que el resultado obtenido coincide con el área de un círculo en 2-dimensiones, en la Fig. (1)b se muestra su representación geométrica.



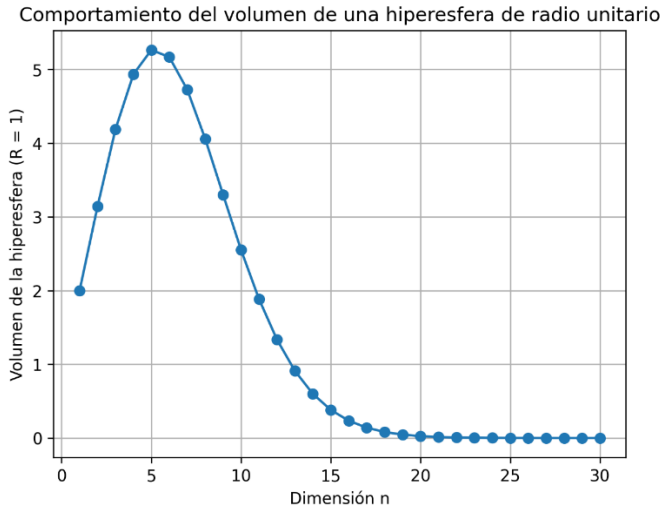
**Figura 1:** (a) Esfera en una dimensión de longitud  $2R$ . (b) Esfera en dos dimensiones de radio  $R$ . (c) Esfera en tres dimensiones de radio  $R$ .

Para 3-dimensiones, i.e.  $n = 3$ , la Exp. (Ec. 15) se reduce a Ec. 18

$$V_3(R) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \pi^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \text{Ec. (18)}$$

donde hemos usado  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  y  $\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ . Podemos constatar que el resultado obtenido corresponde al volumen de una esfera en 3-dimensiones; y cuya representación geométrica se muestra en la Fig. 1(c). De esta manera, la expresión general deducida reproduce correctamente los resultados clásicos en dimensiones bajas, lo cual confirma la validez del procedimiento matemático empleado. Por ejemplo, si deseamos conocer el volumen de una hiperesfera en 4-dimensiones, i.e.  $n = 4$ , con la Exp. (Ec. 15) deducimos que su volumen es Ec. 19,

$$V_4(R) = \frac{\pi^2 R^4}{\Gamma\left(\frac{4}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^2 R^4}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2 R^4}{2}. \quad \text{Ec. (19)}$$



**Figura 2:** Comportamiento del volumen de una hiperesfera de radio unitario calculada a partir de la Exp. 15.

Una característica interesante de la expresión general es que el volumen depende de dos factores principales: el término  $R^n$ , que refleja la dependencia con el radio de la esfera, y el término de la Ec. 20

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \tag{Ec. (20)}$$

que depende únicamente de la dimensión del espacio. Este último factor controla el crecimiento o decrecimiento del volumen cuando la dimensión aumenta. Para analizar el comportamiento del volumen en dimensiones grandes, es conveniente utilizar la aproximación de Stirling para la función Gamma, dada por la expresión de la Ec. 21,

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z, \tag{Ec. (21)}$$

Sustituyendo por  $\frac{n}{2} + 1$  en la Exp., obtenemos la Ec. 22

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(\frac{\frac{n}{2} + 1}{e}\right)^{\frac{n}{2} + 1}, \tag{Ec. (22)}$$

Para  $n$  muy grande, podemos realizar la siguiente aproximación  $\frac{n}{2} + 1 \approx \frac{n}{2}$ , para obtener la Ec. 23,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \approx \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{Ec. (23)}$$

Sustituyendo la Ec. 23 en la Exp. De la Ec. 15, deducimos la Ec. 24,

$$V_n \approx \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2\pi e R^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{Ec. (24)}$$

De la Exp. se observa que para una hiperesfera de radio unitario ( $R = 1$ ) el volumen no crece indefinidamente con la dimensión, ver Fig. 2. De hecho, el volumen aumenta inicialmente hasta alcanzar un máximo alrededor de  $n \approx 5$ , véase la fig. 2, y posteriormente decrece rápidamente conforme la dimensión continúa aumentando, tendiendo a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Otro aspecto relevante es la fuerte dependencia del volumen con el radio de la hiperesfera. Si el radio es mayor que uno ( $R > 1$ ), el término  $R^n$  crece exponencialmente con la dimensión, lo que puede provocar que el volumen aumente rápidamente conforme  $n$  se

incrementa. Por el contrario, si el radio es menor que uno ( $R < 1$ ), el volumen decrece aún más rápidamente a medida que aumenta la dimensión. Esto muestra que pequeñas variaciones en el radio pueden producir cambios muy significativos en el volumen cuando se trabaja en espacios de dimensiones muy grandes.

El estudio del comportamiento geométrico en espacios de muchas dimensiones no es únicamente un ejercicio teórico. En las últimas décadas estos conceptos han adquirido gran relevancia en áreas como la teoría de la información, el análisis funcional, la física estadística y, más recientemente, el aprendizaje automático y la ciencia de datos. En estos campos, los objetos matemáticos suelen describirse mediante vectores en espacios de dimensión muy alta, lo que hace necesario comprender las propiedades geométricas de tales espacios. En particular, la geometría de hiperesferas y otros cuerpos convexos desempeña un papel importante en problemas relacionados con la distribución de puntos en espacios multidimensionales, el análisis de algoritmos y la comprensión de fenómenos como la concentración de medida. Estos resultados muestran cómo una extensión aparentemente simple de un concepto geométrico clásico, como la esfera, puede conducir a propiedades matemáticas profundas cuando se analiza en dimensiones arbitrariamente grandes. En conjunto, los resultados obtenidos ilustran cómo herramientas del cálculo multivariable y del análisis matemático permiten extender conceptos geométricos familiares a espacios de dimensión general. Además, ponen de manifiesto que la intuición geométrica desarrollada en tres dimensiones no siempre es suficiente para comprender el comportamiento de objetos en espacios de alta dimensión, lo que convierte a este tema en un área particularmente interesante dentro de las matemáticas modernas.

## **Conclusiones**

En este artículo, hemos presentado una deducción detallada para calcular el volumen de una esfera en  $n$ -dimensiones, conocida como hiperesfera, utilizando coordenadas hipersféricas y la función gamma. A través de esta deducción, hemos demostrado que el volumen de una hiperesfera de radio  $R$  en  $n$ -dimensiones está dado por la expresión generalizada:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Al aplicar esta fórmula, verificamos los resultados para las dimensiones  $n = 1, 2, 3$  y  $4$ , confirmando que coincide con las fórmulas conocidas para el volumen de una línea, un círculo, una esfera tridimensional y una hiperesfera en cuatro dimensiones.

Adicionalmente, analizamos el comportamiento del volumen de la hiperesfera conforme  $n$  tiende a infinito. Encontramos que:

- Si  $R < 1$ , el volumen tiende a cero exponencialmente rápido.
- Si  $R > 1$ , el volumen tiende a infinito debido al crecimiento exponencial del término  $R^n$ .

Este comportamiento refleja la influencia significativa del radio en el volumen de la hiperesfera a medida que aumentan las dimensiones, destacando cómo las matemáticas pueden proporcionar intuiciones fascinantes y contraintuitivas sobre la geometría en espacios de alta dimensión.

Finalmente, hemos demostrado la utilidad de las coordenadas hiperesféricas y la función gamma en el cálculo de volúmenes en geometrías de dimensiones superiores, ofreciendo una base sólida para futuros estudios y aplicaciones en matemáticas y física teórica.

### Referencias bibliográficas

- Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II: Multi-variable calculus and linear algebra with applications to differential equations and probability* (2nd ed.). Wiley.
- Archimedes. (1964). *The works of Archimedes* (T. L. Heath, Trans.). Dover Publications.
- Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2012). *Mathematical methods for physicists* (7th ed.). Academic Press.
- Artin, E. (1964). *The gamma function*. Holt, Rinehart and Winston.
- Ball, K. (1997). An elementary introduction to modern convex geometry. In S. Levy (Ed.), *Flavors of geometry* (pp. 1–58). Cambridge University Press.
- Blaschke, W. (1957). *Kreis und Kugel*. Chelsea Publishing Company.
- Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

- Conway, J. H., & Sloane, N. J. A. (1999). *Sphere packings, lattices and groups* (3rd ed.). Springer.
- Courant, R., & John, F. (1996). *Introduction to calculus and analysis* (Vol. 2). Springer.
- Folland, G. B. (1999). *Real analysis: Modern techniques and their applications* (2nd ed.). Wiley.
- Gray, A. (2004). *Tubes*. Birkhäuser.
- Hlawka, E., Schoißengeier, J., & Taschner, R. (1991). *Geometric and analytic number theory*. Springer.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector calculus* (5th ed.). W. H. Freeman.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Newton, I. (1964). *The mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. 1). Cambridge University Press.
- Rosen, E. (2007). *Islamic science and the making of the European Renaissance*. MIT Press.
- Schutz, B. F. (2009). *A first course in general relativity* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Stewart, J. (2015). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.
- Tu, L. W. (2011). *An introduction to manifolds* (2nd ed.). Springer.
- Weisstein, E. W. (2023). *Hypersphere*. In *MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html>
- Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (1996). *A course of modern analysis* (4th ed.). Cambridge University Press.
- Zwillinger, D. (2018). *Table of integrals, series, and products* (8th ed.). Academic Press.